Vlastní kmitání oscilátoru

Kmitavý pohyb

Kmitání – periodický děj – zařízení koná opakovaně stejný pohyb a periodicky se vrací do určitého stavu.

oscilátor … zařízení, které může volně kmitat (závaží na pružině, kyvadlo)

kmit… periodicky se opakující část kmit. pohybu

T … perioda (doba kmitu)

f … frekvence (počet kmitů za 1s)

jednoduchý kmitavý pohyb = harmonický pohyb – jeho časový diagram je sinusoida

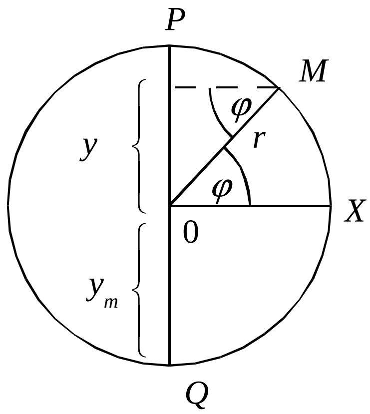
Kinematika kmitavého pohybu

Na pružinu zavěsíme závaží $\rightarrow$ pružina se vlivem tíhy závaží protáhne $\rightarrow$ rovnovážná poloha $\left(\vec{F_p} = -\vec{F_g}\right)$ $\rightarrow$ do těžiště závaží umístíme počátek vztažné soust. $\rightarrow$ souřadnice x, z nulové, souřadnice y = okamžitá výchylka

y_m … maximální výchylka = <u>amplituda</u> výchylky

Závaží na pružině a rovnoměrný pohyb po kružnici … analogie $\Rightarrow$ najdeme vztah pro okamžitou výchylku kmitavého pohybu jako funkci času.

Hmotný bod M se pohybuje po kružnici stálou úhlovou rychlostí ω. Promítneme-li pohyb bodu M do úsečky PQ (tj. promítnutí rotující úsečky $0M$ do úsečky PQ), je zřejmé, že bod M koná v tomto průmětu kmitavý pohyb. Vidíme tedy, jak rovnoměrný pohyb hmotného bodu po kružnici souvisí s kmitavým pohybem.



Z obrázku dostaneme: $\frac{y}{r} = \sin\varphi$

$y = y_m \sin\varphi$

φ … tzv. fáze harmonicky proměnné veličiny

$\varphi = \omega \cdot t$ $\qquad$ $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ … úhlová frekvence kmitavého pohybu okamžitá výchylka jednoduchého kmitavého pohybu:

$$\boxed{y = y_m \sin \omega t}$$

Jednoduchý kmitavý pohyb: periodický, přímočarý, nerovnoměrný, okamžitá výchylka se mění s časem podle fce sinus… jde o tzv. harmonické kmitání

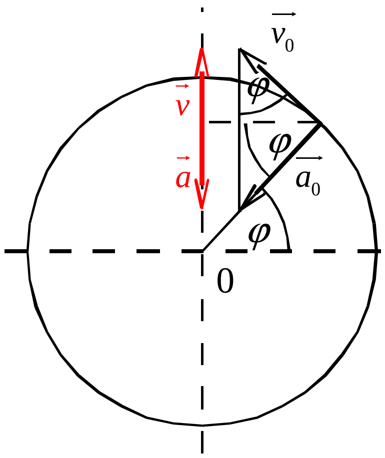
Rychlost a zrychlení kmitavého pohybu

Odvodíme z RP po kružnici.

$\overrightarrow{v_0}$ …vektor rychlosti RP po kružnici, má směr tečny k trajektorii

$v_0 = \omega \cdot r$ velikost rychlosti RP po kružnici

$\vec{v}$ … průmět $\overrightarrow{v_0}$ do osy y



Z obrázku plyne:

$$\frac{v}{v_0} = \cos \varphi$$

$$v = v_0 \cos \varphi$$

$\boxed{v = \omega \cdot y_m \cos \omega t}$ … rychlost kmit. pohybu

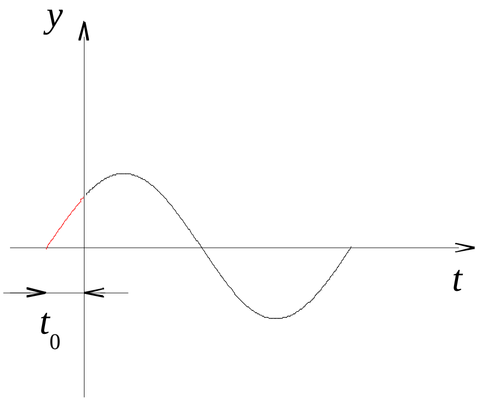
max. rychlost … při rovn. poloze ($\varphi = 0$)
min. rychlost … ve výchylkách amplitud

$$\frac{a}{a_0} = \sin \varphi \quad \Rightarrow \quad a = a_0 \sin \varphi \qquad a_0 = \omega^2 r$$

$\boxed{a = -\omega^2 y_m \sin \omega t}$
$\boxed{a = -\omega^2 y}$ … zrychlení kmit. pohybu

Zrychlení kmitavého pohybu je přímo úměrné okamžité výchylce a v každém okamžiku má opačný směr.

Fáze kmitavého pohybu



oscilátor prošel rovnovážnou polohou před počátečním okamžikem (začátkem měření) o dobu t_0 dříve

rovnice okamžité výchylky tedy bude:

$$y = y_m \sin \omega\left(t + t_0\right) = y_m \sin\left(\omega t + \omega t_0\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{y = y_m \sin\left(\omega t + \varphi\right)}$$

φ … počáteční fáze (fázová konstanta), určuje hodnotu veličiny harmon. kmitání v počátečním okamžiku (t = 0 s)

fázový rozdíl $\Delta\varphi$ veličin kmitavého pohybu = rozdíl jejich poč. fází, mají-li obě veličiny stejnou frekvenci

$\Delta\varphi = 2k\pi$ … veličiny mají stejnou fázi
$\Delta\varphi = (2k + 1)\pi$ … veličiny mají opačnou fázi

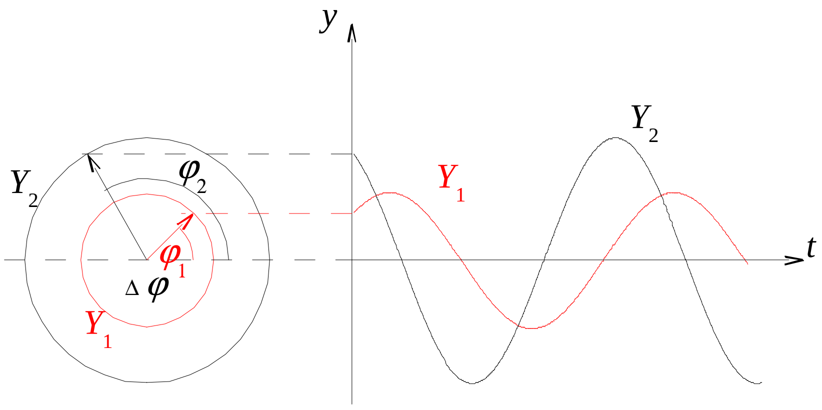
Fázorový diagram

Graficky znázorňuje kmitavý děj
… využívá souvislosti kmit. pohybu a pohybu po kružnici

Fázory … smyšlené rotující vektory (nepředstavují skutečnou veličinu kmitavého děje,viz úsečka *0M* v obrázku v části kinematika kmitavého pohybu – souvislost RP po kružnici a kmitavého pohybu)

Fázorový diagram je vhodný k určení fázového rozdílu (pro děje se stejnou úhlovou frekvencí).

Fázorový diagram veličin reprezentovaných fázory Y_1 a Y_2 , časový diagram a vyjádření jejich fázového rozdílu:



Složené kmitání

<u>Princip superpozice</u>: Koná-li těleso najednou více pohybů, je výsledná poloha tělesa stejná, jako kdyby pohyby konalo za sebou v libovolném pořadí.

<u>Složené kmitání</u>: hmotný bod koná více harmonických pohybů téhož směru

Nejjednodušší je skládání <u>izochronních kmitání</u> (v přímce a se stejnou úhl. frekvencí).

Skládáme v časovém diagramu: sečteme popř. odečteme úsečky odpovídající hodnotám okamžitých výchylek v jednotlivých časových okamžicích s přihlédnutím ke znaménku výchylky

Ve fázorovém diagramu: výsledný fázor najdeme vektorovým složením fázorů složek

Amplituda max. … $\Delta\varphi = 2k\pi$

$$y_m = y_{m_1} + y_{m_2}$$

Amplituda min. … $\Delta\varphi = (2k+1)\pi$

$$y_m = \left| y_{m_1} - y_{m_2} \right|$$

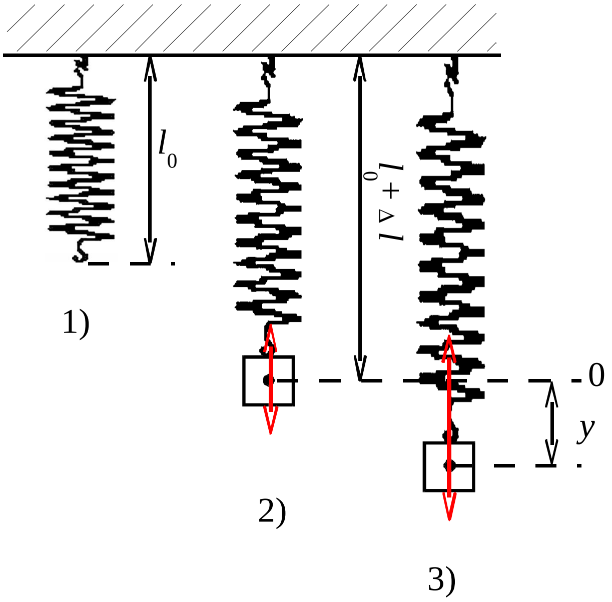
Izochronní kmitání se při stejné počáteční fázi složením zesiluje a při opačné zeslabuje. Výsledné kmitání je opět izochronní.

Pro neizochronní kmity nevzniká harmonické kmitání.

Pro případ blízkých frekvencí

$\omega_1 \rightarrow \omega_2$ … vznikají rázy

Dynamika kmitavého pohybu



2) $F_p = F_G$

$k \cdot \Delta l = mg$

… rovnovážná poloha závaží $l_0 + \Delta l$

3) $F_p > F_G$ … vychýlení závaží z rovn. polohy

proměnlivá výsledná síla pús. na oscilátor: $F = F_G - F_p$

k … tuhost pružiny

celková síla působící na oscilátor při okamžité výchylce:

$F = mg - k(\Delta l + y) = mg - k\Delta l - ky \quad \Rightarrow$

$\boxed{F = -ky}$ $\vec{F}$ míří neustále do rovnovážné polohy a její velikost je úměrná okamžité výchylce

$\Rightarrow \; ma = -ky$

$a = -\dfrac{k}{m} y \qquad a = -\omega_0^2 y$

$\omega_0^2 = \dfrac{k}{m} \qquad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}}$ … úhlová frekvence vlastního kmitání oscilátoru, závislost jen na parametrech oscilátoru

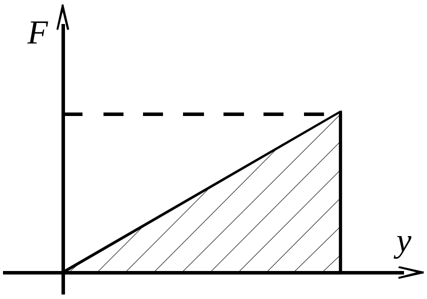
$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} \\ f_0 = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}} \end{array}}$$

Přeměny energie v mechanickém oscilátoru

Při uvádění oscilátoru do kmit. pohybu musíme oscilátor vychýlit z rovnovážné polohy, při tom musíme působit silou, která se postupně zvětšuje $F = k \cdot y$ (viz obrázek$\downarrow$)



<u>Vykonáme práci</u>: $W = \frac{1}{2}Fy = \frac{1}{2}ky^2$

tj. $W = E_p$ … má maximum při amplitudě výchylky

při přechodu oscilátoru do rovnov. polohy klesá E_p a roste E_k (E_k v rovn. pol. = E_p při amplitudě výchylky)

Celková mechanická energie oscilátoru je konstantní. V reálu je každé kmitání tlumené a tedy se mechanická energie oscilátoru mění na jiné formy energie.

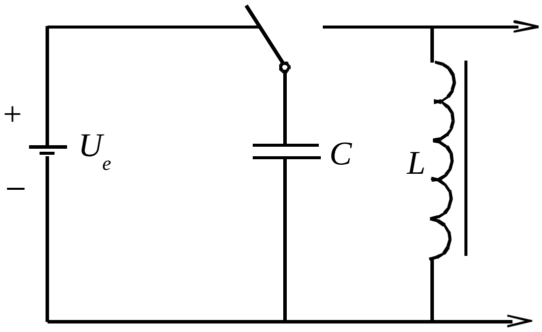
Elektromagnetický oscilátor

LC obvod … přeměna el. energie kondenzátoru v energii mgn. pole cívky a naopak

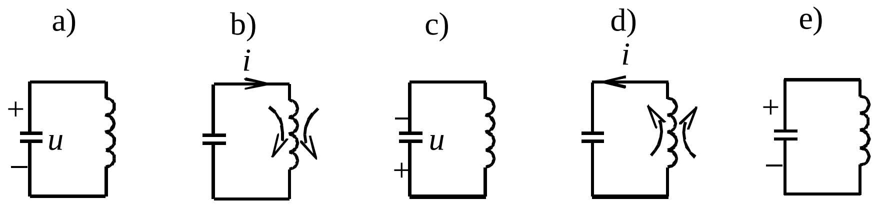
energie el. pole kondenzátoru: $E_e = \frac{1}{2}Q \cdot U \quad Q = C \cdot U \quad \Rightarrow \boxed{E_e = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}}$

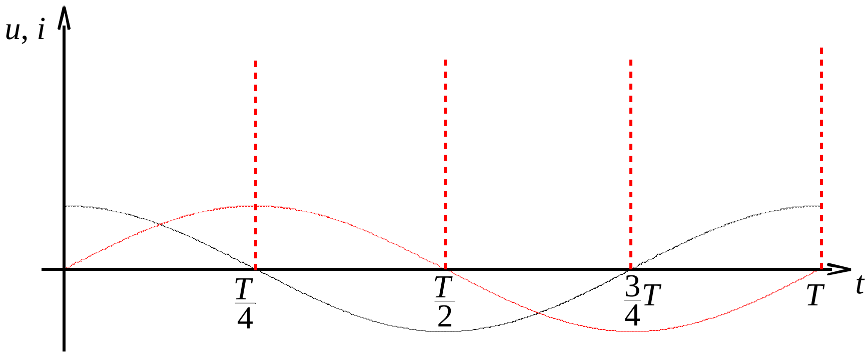
energie magnetického pole cívky: $\boxed{E_m = \frac{1}{2}LI^2}$

K nabitému C připojíme $L \rightarrow$ elmg. kmitání (harmonické změny U, I v obvodu).
Vlastní kmitání obvodu pozorujeme osciloskopem



připojení osciloskopu





a) kondenzátor nabitý, obvodem proud neprochází.

b) Kondenzátor se vybíjí, napětí na něm klesá na nulu, obvodem prochází max. proud, max. hodnota energie mgn. pole cívky.

c) Při klesání proudu se indukuje na cívce napětí podle Lenz. pravidla (proud stejného směru) $\rightarrow$ nabití kondenzátoru.

d), e) Stejné děje pouze opačně.

- kmitání je vždy tlumené (odpor vodičů, hlavně odpor vinutí cívky)
- fázový posun mezi u a i je $\frac{T}{4}$ $\left(\frac{\pi}{2}\text{rad}\right)$

Analogie mezi oscilátory

$$E_p = \frac{1}{2}Fy = \frac{1}{2}ky^2$$

$$E_e = \frac{1}{2}uq = \frac{1}{2}\frac{q^2}{c}$$

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

$$E_m = \frac{1}{2}Li^2$$

Mechanický oscilátor	Elektromagnetický oscilátor
y	q
v	i
E_p	E_e
E_k	E_m
F	u
m	L
$k = \frac{F}{y}$	$\frac{1}{C} = \frac{u}{q}$
$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$	$T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$
$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$	$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

$q = Q_m \cdot \cos \omega t$
$u = U_m \cdot \cos \omega t$
$i = I_m \cdot \sin \omega t$

Q_m amplituda náboje
U_m amplituda napětí
I_m amplituda proudu