VLASTNÍ KMITÁNÍ OSCILÁTORU

Příklady:

1A/277. Oscilátor koná harmonický pohyb s amplitudou výchylky 5cm a periodou 4s. Určete rovnici jeho pohybu, víte-li, že v okamžiku 1,5 s od začátku měření dosáhl nulové výchylky.

y_M = 5 cm
T = 4 s
<u>t = 1,5 s, y = 0</u>

Řešení:
Obecná rovnice harmonického pohybu :

$$y = y_M \sin(\omega t + \varphi)\,\text{cm}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 0{,}5\pi\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$y = 0 \ \Rightarrow\ 0{,}5\pi t + \varphi = 0\ (t = 1{,}5\,\text{s})$$

$$\varphi = -\frac{3}{4}\pi$$

$$\underline{\underline{y = 5\sin\left(0{,}5\pi t - \frac{3}{4}\pi\right)\text{cm}}}$$

2A. Harmonický pohyb je popsán rovnicí $y = 0{,}1\sin\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$ m. Určete amplitudu, úhlovou frekvenci, a okamžik, ve kterém je poprvé okamžitá výchylka maximální. Nakreslete graf vyjadřující závislost okamžité výchylky na čase.

Řešení:

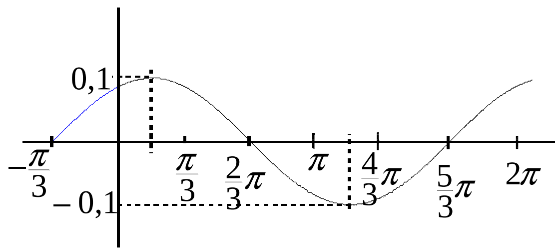
y_M = 0,1 m

$$\omega = \pi\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\,\text{s}$$

podmínka pro dosažení maximální výchylky (y_M): $\sin\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right) = 1 \Leftrightarrow \pi t + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{t = \frac{1}{3}\,\text{s}}}$$



Amplituda je 0,1 m, úhlová frekvence je π rad $\cdot$ s^{-1}, perioda je 2 s, okamžitá výchylka je maximální za dobu 0,3 s.

1B. Napište rovnici harmonického pohybu, je-li jeho amplituda 10 cm, perioda je 2s a fázová konstanta 60°

Řešení:

y_M = 10 cm = 0,1 m

$\varphi = 60° = \dfrac{\pi}{3}$

$\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \pi$ rad $\cdot$ s^{-1}

$$\underline{\underline{y = 0{,}1\sin\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right)\ \text{m}}}$$

2B. Harmonický pohyb je popsán rovnicí $y = 0{,}05\sin\left(\dfrac{\pi}{2}t + \dfrac{\pi}{4}\right)$ m . Určete amplitudu, periodu a fázovou konstantu. Jaká je okamžitá výchylka v čase t_1 = 0 s a t_2 = 1,5 s?

Řešení:

y_M = 0,05 m

$T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 4\,\text{s}$

$\varphi = \dfrac{\pi}{4}$

Okamžitá výchylka v čase t = 0s a v čase t = 1,5s:

$t_1 = 0\,\text{s} \qquad y = 0{,}05 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2}\ \text{m} = \underline{\underline{0{,}035\,\text{m}}}$

$t_2 = 1{,}5\,\text{s} \qquad y = 0{,}05 \cdot \sin\pi\ \text{m} = \underline{\underline{0\,\text{m}}}$

Amplituda výchylky je 0,05 m, perioda je 4 s, fázová konstanta $\dfrac{\pi}{4}$, okamžitá výchylka v čase t = 0 s je 0,035 m a v čase t = 1,5 s je 0 m.

3. Harmonický pohyb je popsán rovnicí $y = 7\sin 0{,}5\pi t$ mm. Určete amplitudu a jeho periodu.

Řešení:

$$y_M = 0{,}007m$$
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 4\,\mathrm{s}$$

Amplituda pohybu je 0,007 m a perioda 4 s.

4. Za jak dlouho od počátku pohybu dosáhne harmonický oscilátor výchylky odpovídající polovině amplitudy, víte-li, že perioda jeho pohybu je 24 s a fázová konstanta je nulová?

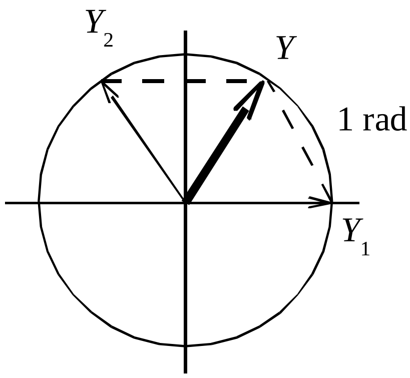
$\varphi = 0°$
T = 24 s
$y = y_M/2$
$\underline{t = ?}$

Řešení:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{12}\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$$
$$y = y_m \sin\frac{\pi}{12}t$$
$$\frac{y_m}{2} = y_m \sin\frac{\pi}{12}t$$
$$\sin\frac{\pi}{12}t = \frac{1}{2}$$
$$\frac{\pi}{12}t = \frac{\pi}{6}$$
$$\underline{\underline{t = 2s}}$$

Oscilátor dosáhne výchylky rovné polovině amplitudy za dobu 2s.

5/278. Složením dvou harmonických pohybů o téže amplitudě a stejné úhlové frekvenci můžeme dostat harmonický pohyb o stejné amplitudě (viz obrázek). Napište rovnice obou harmonických pohybů a rovnici složeného harmonického pohybu.



Řešení:

Abychom dostali složením dvou harmonických pohybů o stejné úhlové frekvenci a amplitudě harmonický pohyb o téže amplitudě, musí být fázový rozdíl obou pohybů 120°, viz obrázek. Rovnice jednotlivých pohybů a složeného pohybu pak budou:

$$y_1 = Y_1 \cdot \sin(\omega t) \text{ m}$$

$$y_2 = Y_2 \cdot \sin\left(\omega t + \frac{2}{3}\pi\right) \text{ m}$$

$$y = Y \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) \text{ m}$$

7/278. Mechanická energie harmonického oscilátoru je $3 \cdot 10^{-7}$ J a amplituda jeho výchylky má velikost 2 cm. Spočtěte okamžitou výchylku harmonického oscilátoru, jestliže v daném okamžiku na něj působí výsledná síla $2{,}25 \cdot 10^{-5}$ N.

$y_m = 0{,}02$ m
$E = 3 \cdot 10^{-7}$ J
$F = 2{,}25 \cdot 10^{-5}$ N
$y = ?$

Řešení:

$$E = \frac{1}{2} k y_m{}^2$$

$$k = \frac{2E}{y_m^2} F = 1{,}5 \cdot 10^{-4} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$y = \frac{F}{k} = 0{,}015 \text{ m}$$

Okamžitá výchylka harmonického oscilátoru je 0,015 m.

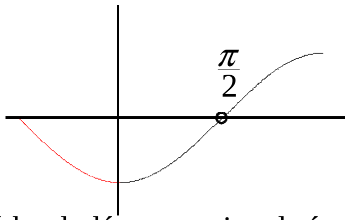
VLASTNÍ KMITÁNÍ OSCILÁTORU

8/279. Napište rovnici harmonického pohybu s periodou 2s, jestliže nejprve byla oscilátoru dodána energie - $3 \cdot 10^{-5}$ J působením síly o velikosti $F = 1{,}5 \cdot 10^{-3}$ N.
Nulová hladina potenciální energie odpovídá rovnovážné poloze oscilátoru.

E_p=- $-3 \cdot 10^{-5}$ J
$F = 1{,}5 \cdot 10^{-3}$ N
$\underline{T = 2\text{s}}$

Řešení:
$F = 1{,}5 \cdot 10^{-3}$ N
$E_p = \underline{W = 3 \cdot 10^{-5}\ \text{J}}$

$$\left.\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}ky_m^2 \\ F &= ky_m \end{aligned}\right\} y_m = \frac{2W}{F} = 0{,}04\,\text{m}$$



$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi\ \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

Vzhledem k tomu, že oscilátoru byla na počátku dodána energie, platí:

$$t = 0 \Rightarrow y = -y_m \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2}$$

$$\underline{\underline{y = 0{,}04 \sin\left(\pi t - \frac{\pi}{2}\right)}}$$